

УДК 624.04

*А.А. КУТОНОВА, В.И. УВАРОВА,**студентки 3 курса СФ**Научный руководитель:**Б.А. ТУХФАТУЛЛИН, канд. техн. наук, доцент,**секция сопротивления материалов и строительной механики*

ФОРМУЛА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ ПЛОСКОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Для статического и кинематического анализа необходимо определять число степеней свободы W . В учебной литературе [1–6] приводятся формулы для вычисления W :

$$W = 3D - 2Ш_0 - C_0, \quad (1)$$

$$W = 2У - C - C_0, \quad (2)$$

где D , $Ш_0$, C_0 , $У$, C – количество дисков; «простых» шарниров; опорных связей; узлов и стержней, соответственно. Формулу (1) используют при анализе балок и рам, для ферм удобнее использовать формулу (2). Если стержневая система содержит один или несколько замкнутых контуров, то разделить ее на диски в соответствии с формулой (1) в некоторых случаях невозможно. В [1–3] предлагается использовать уточненные варианты формулы (1):

$$W = (3D - 2Ш_0 - C_0) - 3К, \quad (3)$$

$$W = 3D - (C^* + 2Ш_0 + 3Ж) - C_0, \quad (4)$$

$$W = (3D + 2У) - (C^* + 2Ш_0 + 3Ж) - C_0, \quad (5)$$

где $К$, C^* , $Ж$ – количество замкнутых контуров, образованных стержнями; связей, соединяющих диски; жестких узлов (припаек).

Неудобство использования формул (3), (4), (5) – в том, что входящие в их состав величины определяются неоднозначно – например, стержень с шарнирами по концам может быть принят как за диск D , так и как за связь C^* ; разделение стержня сложной конфигурации на жестко соединенные в узлах диски осуществляется не единственным способом и т. д.

При расчете статически неопределимых систем количество «лишних» связей L определяют по формулам [1–7]:

$$L = -W = C_0 + 2Ш_0 - 3D, \quad (6)$$

$$L = -W = 3К + C_0 + 2Ш_0 - 3D, \quad (7)$$

$$L = 3К - Ш_0 + C_0 - 3, \quad (8)$$

$$L = 3К - Ш_0, \quad (9)$$

$$L = 3К - Ш_0 - П, \quad L = 3К - C_{\text{нал}} \quad (10)$$

$$L = 3(C - У) - C_{\text{нал}}, \quad (11)$$

где $П$ – число ползунов; $C_{\text{нал}}$ – количество связей, необходимых для превращения заданной системы в систему с жесткими узлами.

Формулу (6) можно использовать только в том случае, если входящие в состав системы диски статически определимы; в формулах (7), (8), в отличие от (9), (10), замкнутым считается контур, образованный только стержнями рамы; определение $C_{\text{нал}}$ в (10), (11) требует определенных навыков. Большое количество различных формул (более десяти) неудобно для использования и запоминания.

Универсальную формулу для определения количества «лишних» связей и числа степеней свободы можно получить следующим образом. Разделим систему на узлы (места изменения геометрии, установки шарниров, наложения опорных связей) и соединяющие их стержни. В каждом стержне известно шесть внутренних усилий – три усилия в начале и три в конце. Число неизвестных (внутренних усилий и опорных реакций) для всей системы

$$n = 6C + C_0. \quad (12)$$

Для каждого стержня и для узла можно составить по три уравнения равновесия. «Простой» шарнир дает дополнительное уравнение равновесия, т. к. момент в начале (или в конце) стержня равен нулю. Таким образом, число уравнений равновесия

$$m = 3C + 3Y + \text{Ш}_0. \quad (13)$$

Количество «лишних» связей равно разности между числом неизвестных (12) и числом уравнений (13)

$$L = (6C + C_0) - (3C + 3Y + \text{Ш}_0) = 3(C - Y) - \text{Ш}_0 + C_0, \quad (14)$$

тогда

$$W = -L = 3(Y - C) + \text{Ш}_0 - C_0. \quad (15)$$

Частный случай формулы (14): $3(C - Y) - \text{Ш}_0 + C_0 = 0$ был использован в [7] в качестве необходимого условия статической определимости.

Получим формулу (15) другим способом.

Жесткий узел обладает тремя степенями свободы – двумя линейными перемещениями x_n, y_n и одним углом поворота α (рис 1, а).

При жестком соединении двух узлов стержнем число степеней свободы будет также равно трем (рис 1, б). При шарнирном соединении узел может повернуться вокруг стержня на угол β (рис 1, в), следовательно, число степеней свободы будет равно четырем.

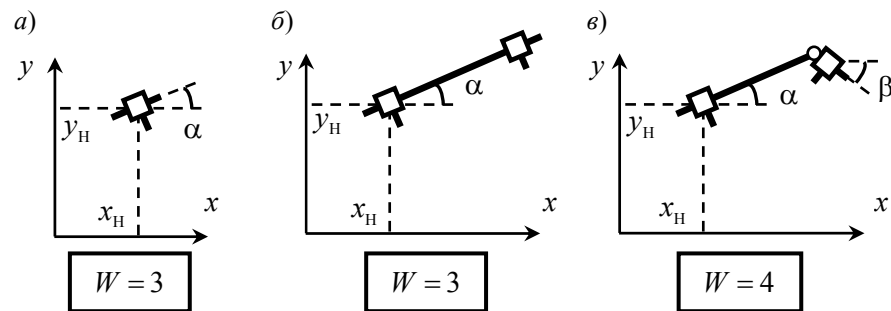


Рис. 1

Стержень устраняет три степени свободы, опорная связь – одну, а «простой» шарнир добавляет одну степень свободы. Таким образом

$$W = 3Y - 3C + \text{Ш}_0 - C_0 = 3(Y - C) + \text{Ш}_0 - C_0.$$

Рассмотрим случай, когда все узлы стержневой системы шарнирные. Количество «простых» шарниров для C необъединенных стержней (рис. 2, а) равно $2C$, в каждом узле шарниров на единицу меньше, чем число стержней, сходящихся в узле [2], тогда (рис. 2, б)

$$\text{Ш}_0 = 2C - Y. \quad (16)$$

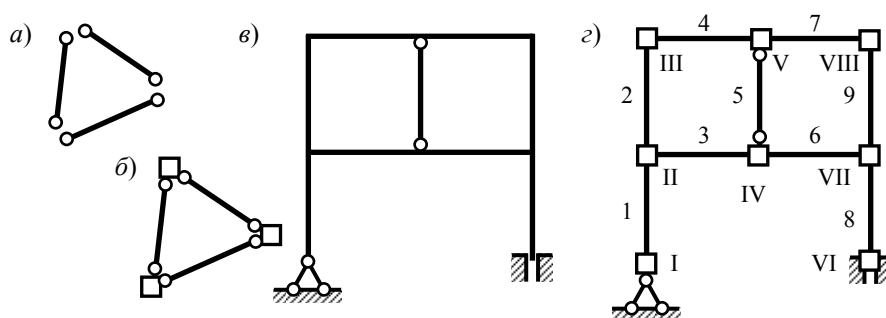


Рис. 2

Подставляя (16) в (15), получаем известную формулу для кинематического анализа фермы

$$W = 3(Y - C) + \text{Ш}_0 - C_0 = 3(Y - C) + (2C - Y) - C_0 = 2Y - C - C_0.$$

Покажем, что формулу (15) можно получить из формулы (2). Для этого предварительно запишем (2) в виде

$$W = 2Y - C - C_0 = (2Y - C - C_0) + \text{Ш}_0 - \text{Ш}_0,$$

а затем, используя формулу (16)

$$W = (2Y - C - C_0) + \text{Ш}_0 - (2C - Y) = 3(Y - C) + \text{Ш}_0 - C_0.$$

Использование формулы (15) покажем на примере (рис. 2, в). Определим количество узлов, стержней, «простых» шарниров и опорных связей (рис. 2, в): $Y = 8, C = 9, \text{Ш}_0 = 2, C_0 = 4$. Подсчитаем число степеней свободы W и количество «лишних» связей L :

$$W = 3(Y - C) + \text{Ш}_0 - C_0 = 3(8 - 9) + 2 - 4 = -5;$$

$$L = 3(C - Y) - \text{Ш}_0 + C_0 = 3(9 - 8) - 2 + 4 = 5.$$

Выводы. Предложена формула для определения числа степеней свободы плоской стержневой системы и три различных способа ее получения. Использование данной формулы не вызывает затруднений и каких-либо ограничений как при определении числа степеней свободы, так и при вычислении количества «лишних» связей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Анохин, Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах. Ч. I. Статически определимые системы: учебное пособие / Н.Н. Анохин. – М.: Изд-во АСВ, 1999. – 335 с.
2. Киселев, В.А. Строительная механика. Общий курс: учебник для вузов / В.А. Киселев. – М.: Стройиздат, 1986. – 520 с.
3. *Строительная механика в примерах и задачах: учебное пособие* / В.А. Киселев, А.М. Афанасьев, В.А. Ермоленко [и др.]. – М.: Стройиздат, 1968. – 386 с.
4. Бутенко, Ю.И. Строительная механика. Руководство к практическим занятиям / Ю.И. Бутенко. – Киев: Вища школа, 1984. – 328 с.
5. Леонтьев, Н.Н. Основы строительной механики стержневых систем / Н.Н. Леонтьев, Д.Н. Соболев, Л.Л. Амосов. – М.: Изд-во АСВ, 1996. – 541 с.
6. *Строительная механика. Статика упругих систем: учебник для вузов* / В.Д.Потапов, А.В. Александров, С.Б. Косицын [и др.]. М.: Высш. шк., 2007. – 511 с.
7. *Строительная механика* / А.В. Дарков, Г.К. Клейн, В.И. Кузнецов [и др.]. – М.: Высш. шк., 1976. – 600 с.

УДК 624.04

*Ю.В. КУДЕЛЬКИНА, Е.Г. ЛИФАНОВА, А.А. ПРОКОПОВА,**студенты**Научный руководитель:**Б.А. ТУХФАТУЛЛИН, канд. техн. наук, доцент,**секция сопротивления материалов и строительной механики***РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СЛОЖНОЙ ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ**

Предложен алгоритм вычисления внутренних усилий в статически неопределимой системе без составления и решения системы канонических уравнений метода сил. Основные этапы алгоритма заключаются в следующем.

1. Рассчитываем статически определимую основную систему на действие внешней нагрузки и единичных значений неизвестных.

2. Добавляем к системе одну связь и решаем задачу с одним неизвестным.

3. Добавляем вторую связь, принимая в качестве основной системы один раз статически неопределимую раму [1]. Такая основная система называется *сложной*.

4. Добавляем третью и т. д. связи, решая каждый раз задачу с одним неизвестным.

Для примера рассмотрим трижды статически неопределимую раму (рис. 1, *а*). Выберем на первом этапе статически определимую основную систему метода сил (рис. 1, *б*), и построим в ней единичные эпюры $M_1^{(0)}$, $M_2^{(0)}$, $M_3^{(0)}$ и грузовую эпюру $M_p^{(0)}$ изгибающих моментов (рис. 1, *в–е*).

Добавим к системе одну связь, соответствующую неизвестному X_1 , и рассчитаем задачу на действие внешней нагрузки. Определим перемещения по направлению реакции X_1 перемножением эпюр: